Analiza Funkcjonalna
WPPT IIr. semestr letni 2011
WYKŁAD 1: PRZESTRZENIE LINIOWO-METRYCZNE

15/03/11

UWAGA: NA ĆWICZENIA PROSZE PRZYGOTOWAĆ LISTĘ 5

Przypomnijmy co to jest przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{S}$ (najczęściej jest to $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$): jest to tójka $(X, +, \cdot)$, gdzie $+ : X \times X \to X$ i $\cdot : \mathbb{S} \times X \to X$ spełnia następujące aksjomaty:

1. $(X, +)$ jest grupą abelową (inaczej przemienną), tzn. działanie $+$ jest łączne, przemienne, ma element neutralny (ozn. $\mathbf{0}$) i każdy element ma odwrotny.

2. Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania wektorów:

$$a(x + y) = ax + ay$$

(z tego już wynika, że mnożenie przez wektor $\mathbf{0}$ daje zawsze wektor $\mathbf{0}$.

3. Mnożenie przez wektor jest rozdzielne względem dodawania skalarów:

$$(a + b)x = ax + bx$$

(z tego już wynika, że mnożenie przez skalar 0 daje zawsze wektor $\mathbf{0}$.

4. Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów:

$$(ab)x = a(bx).$$

5. Mnożenie przez 1 jest neutralne

$$1 \cdot x = x$$

(z tego wynika, że mnożenie przez dowolny skalar różny od zera jest bijekcją oraz, że mnożenie przez -1 daje element odwrotny względem dodawania).

Analiza funkcjonalna łączy w sobie algebrę liniową i topologię (metryczną). Podstawowym obiektem jest tu *przestrzeń liniowo-metryczna* zdefiniowana poniżej:

DEFINICJA 1 *Przestrzeń liniowo-metryczna* (X, d) to przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{R}$ (wtedy mówimy *rzeczywista p-ń liniowo-metryczna*) lub $\mathbb{C}$ (wtedy jest to *zespolona p-ń liniowo-metryczna*) wyposażona w metrykę d w taki sposób, że następujące funkcje są ciągłe (w obu przypadkach na dziedzinie rozważamy metrykę produktową (powiedzmy „maksimum"):

$$(x, y) \mapsto x + y \quad \text{(funkcja działająca z } X \times X \to X\text{)},$$
$$(a, x) \mapsto ax \quad \text{(funkcja działająca z } \mathbb{R} \times X \to X \text{ lub z } \mathbb{C} \times X \to X\text{)}.$$

Inaczej mówimy, że działania (dodawanie i mnożenie przez skalar) *są ciągłymi funkcjami obu swoich zmiennych jednocześnie.* Uwaga, to jest więcej niż ciągłość ze względu na każdą zmienną z osobna!

PRZYKŁADY:
Oprócz bardzo oczywistych przykładów postaci $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$), będziemy przede wszystkim rozważać następujące dwa typy przestrzeni liniowo-metrycznych:
a) przestrzenie ciągowe: ℓ^∞, c, c_0, ℓ^1, ℓ^2 oraz
b) przestrzenie funkcyjne: $C(\mathbb{R})$, $CB(\mathbb{R})$, $C([0,1])$, $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$, $L^1([0,1])$, $L^2([0,1])$, $L^\infty([0,1])$.
Zdefiniowane są one następująco:

- c to zbiór wszystkich ciągów (rzeczywistych lub zespolonych) z metryką supremum obciętą na poziomie 1;
- ℓ^∞ to zbiór wszystkich ciągów (rzeczywistych lub zespolonych) ograniczonych, z metryką supremum;
- c to zbiór wszystkich ciągów (rzeczywistych lub zespolonych) zbieżnych, z metryką supremum;
- c_0 to zbiór wszystkich ciągów (rzeczywistych lub zespolonych) zbieżnych do zera, z metryką supremum;
- ℓ^1 to zbiór wszystkich ciągów (rzeczywistych lub zespolonych) bezwzględnie sumowalnych, z metryką $d_1((a_n),(b_n)) = \sum_n |a_n - b_n|$;
- ℓ^2 to zbiór wszystkich ciągów (rzeczywistych lub zespolonych) bezwzględnie sumowalnych z kwadratem, z metryką $d_2((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_n |a_n - b_n|^2}$;

- $C([0,1])$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) ciągłych na $[0,1]$, z metryką supremum;
- $L^1([0,1])$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) bezwzględnie całkowalnych na $[0,1]$, z metryką $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\,dx$;
- $L^2([0,1])$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) bezwzględnie całkowalnych z kwadratem na $[0,1]$, z metryką $d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f-g|^2\,dx}$;
- $L^\infty([0,1])$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) mierzalnych i ograniczonych na $[0,1]$, z metryką ,,supremum istotne";
- $CB(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) ciągłych i ograniczonych na $[0,1]$, z metryką supremum;
- $C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) ciągłych na $[0,1]$, z metryką supremum obciętą na poziomie 1;
- $L^1(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) bezwzględnie całkowalnych na $\mathbb{R}$, z metryką $d_1(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f-g|\,dx$;
- $L^2(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) bezwzględnie całkowalnych z kwadratem na $\mathbb{R}$, z metryką $d_2(f,g) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f-g|^2\,dx}$;
- $L^\infty(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) mierzalnych i ograniczonych na $\mathbb{R}$, z metryką ,,supremum istotne".

UWAGA: We wszystkich przestrzeniach oznaczonych literą L elementami są nie dosłownie funkcje lecz ich klasy modulo równość prawie wszędzie! Innymi słowy są to przestrzenie ilorazowe względem odpowiednich pseudometryk.